9. Рассмотрите поведение на бесконечности решения уравнения Гельмгольца при различных видах коэффициента C.
10. Сформулируйте для неограниченной области теорему единственности решения уравнения Гельмгольца в случае отрицательного коэффициента C.
11. Напишите условие излучения Зоммерфельда в трехмерном случае.
12. Напишите условия излучения Зоммерфельда в двумерном случае.
13. В каком случае и для чего ставятся условия излучения Зоммерфельда?
14. Сформулируйте принцип предельного поглощения.
15. Сформулируйте принцип предельной амплитуды.

В курсе ММФ мы танцевали вокруг да около уравнения Лапласа
$\Delta u=0$
А более общее уравнение Гельмгольца
$\Delta u+Cu=0$
Мы рассматривали в самом конце и в-общем-то, галопом по Европам.
Пришло время поговорить о нём подробнее.

В зависимости от знака C будем различать k-уравнение:
$\Delta u+k^2u=0$ (это случай положительного коэфа C)
æ-уравнение:
$\Delta u-æ^2u=0$ (это случай отрицательного коэфа C)
Естественно, давайте для простоты считать k и æ положительными, они всё равно в квадрате стоят.
И отдельно выделим случай комплексный случай
$\Delta u-(a+bi)^2u=0$ (это случай комплексного коэфа C)

Рассмотрим примеры, где это уравнение может возникнуть:
1) Мы решаем уравнения Максвелла с условием, что у нас давным-давно закончились все переходные процессы и у нас во всём пространстве периодические синусоидальные колебания с частотой ω.
Например, мы хотим подсчитать процесс дифракции. У нас есть источник и какие-то препятствия в пространстве: тут отверстие, в другом месте полуплоскость и т.д. Происходит дифракция, интенсивность очень хитроумным способом перераспределяется, но раз источник горит с постоянной мощностью, то зависимость от времени будет очень простая: в каждой точке синусоидальная.
Тогда $u(x,y,z,t)=F(x,y,z)\exp(-i\omega t)$, u – любая из проекций E, B, D, H.
Подставляем это в волновое уравнение
$c^2\Delta u=\partial^2u/dt^2$
И получаем $\Delta u+k^2u=0$, где $k=\omega/c$.

Отметим, что если у нас среда, поглощающая волны, то k будет комплексным. А если поглощения нет, то действительным.

2) Процесс диффузии.
$$u_t = D\Delta u + cu + F.$$

Производная количества молекул в каждой точке есть лапласиан (D – коэф-т диффузии) + cu, если C<0 – молекулы самопроизвольно распадаются, если C>0 – тут уже какие-то цепные реакции между ними и средой. f- функция источника, если она >0, то в этом месте молекулы рождаются, если <0 – в этом месте орудует маньяк, убивающий некоторое число молекул каждый момент времени.
Если процесс стационарен, то $u_t=0$ и

$$\Delta u + Cu = -f,$$

где $C = \frac{c}{D}, \quad f = \frac{1}{F}$

В отличие от предыдущего случая, здесь C может быть как положительным, так и отрицательным.

Рассмотрим сначала æ-уравнение (C<0):

Его решением будет

$$u^{\pm}(M) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_D \frac{e^{\pm \varkappa r_{QM}}}{r_{QM}} f(Q) \mathrm{d}V_Q,$$

Как правило, нам нужно решение, затухающее на бесконечности. В этом случае ФСР усыхает до

$$u(M) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_D \frac{e^{-\varkappa r_{QM}}}{r_{QM}} f(Q) \mathrm{d}V_Q$$

Как мы его получили? Ну, тупо подставьте в дифур и убедитесь, что работает ☺ В этом случае нам придётся доказывать единственность. Боголюбов был к такому раскладу событий готов и формулирует

Теорема 1. Классическое решение уравнения

$$\Delta u - \varkappa^2 u = -f(M),$$

равномерно стремящееся к нулю на бесконечности, единственно.
Доказывается она стандартным способом: пусть решения два, вычтем одно из другого, их разность удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца, а у нас есть принцип максимума, который верен для эллиптических уравнений, а уравнение Гельмгольца эллиптическое, пам-пам-пам.
Это мы про ответили на уравнение.

10. Сформулируйте для неограниченной области теорему единственности решения уравнения Гельмгольца в случае отрицательного коэффициента C.

Вот и всё про æ-уравнение.

Пример. Рассмотрим уравнение диффузии с отрицательным C (т.е. молекулы будут самопроизвольно распадаться). Пусть у нас в круге радиусом R f(Q)=1, а вне его 0. Т.е. внутри этого круга организован роддом молекул. Т.е. идут два процесса – рождение молекул в круге и распад где придётся. Какая же картина будет по концетрации вдали от круга на больших расстояниях r>>R? В этом случае приближённо можно считать r_{QM} равно r, фигура D будет круг радиусом πR^2, поэтому концентрация молекул будет $u(r)= \pi R^2 * \exp(-ær)/r$.

Следующее у нас на очереди a+bi-уравнение
$\Delta u-(a+bi)^2u=0$
Чтобы получить его решение, нужно тупо заменить æ на a+bi:

$$u^{\pm}(M) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_D \frac{e^{\pm(a+bi)r_{QM}}}{r_{QM}} f(Q)\mathrm{d}V_Q$$

А сможете выбрать из двух решений ФСР затухающее на бесконечности? Правильно: то, для которого действительная часть показателя экспоненты будет отрицательно (т.е. +a+bi, если a>0, и –a-bi, если a<0).

Замечание. У Боголюбова немного иная терминология: у него уравнение записывается не $\Delta u-(a+bi)^2u=0$, а как $\Delta u+(\overline{k} + i\overline{\overline{k}})^2u=0$ – вместо минуса плюс. Тогда то, какое из двух решение ФСР будет затухать на бесконечности, будет определяться уже мнимой частью, т.е. $\overline{\overline{k}}$.

Самым сложным оказывается k-уравнение!
Решение его выписывается быстро. Сравнивания $\Delta u+k^2u=0$ и $\Delta u- æ^2u=0$, делаем вывод, что æ=плюсминус ik, откуда решение будет

$$u^{\pm}(M) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_D \frac{e^{\pm ikr_{QM}}}{r_{QM}} f(Q)\mathrm{d}V_Q$$

Пример на физическое понимание. f(Q) – функция источника. Т.е. в каждой точке области D расположен источник электромагнитных волн (а если его нет, то f(в этой точке) просто будет 0), и каждый генерирует свою сферическую волну синусоидальную (числитель дроби) волну амплитудой f(Q), которая как раз потом убывает обратно пропорционально (этим вызван знаменатель).

Проблема возникает с отбором при условии затухания на бесконечности. Затухают оба: числитель дроби ограничен 1, а знаменатель убывает. Что выбрать?

Тут нам и нужны т.н. условия Зоммерфельда!

13. В каком случае и для чего ставятся условия излучения Зоммерфельда?

Они нужны, чтобы из двух ветвей k-уравнения выбрать затухающую на бесконечности!

А как же они выглядят? Да вот же они:

11. Напишите условие излучения Зоммерфельда в трехмерном случае.

$$u(M) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} - iku = o\left(\frac{1}{r}\right).$$

12. Напишите условия излучения Зоммерфельда в двумерном случае.

$$u(M) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right),$$

$$\lim_{r\to\infty} \sqrt{r}\left[\frac{\partial u}{\partial r} - iku\right] = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial u}{\partial r} - iku = o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right).$$

Кулстори от Боголюбова: { Многие студенты, выписывая условия излучения Зоммерфельда в 2D, ленятся (или забывают) про первое условие и выписывают только второе.
Советский грузинский математик Илья Несторович Векуа показал, что первое условие на самом деле следует из второго, спасая задницы ленивых студентов. Однако, как сказал Боголюбов, он-то про результат Векуа знает, а всякие аспиранты – нет. Так что вы всё-таки лучше его пишите, а то аспирант может быть не в курсе. }

Ну всё, Зоммерфельд гений, придумал такие классные условия! Всюду ли они применимы! Облом: не всюду.

Давайте вспомним, что C было комплексным, мы легко смогли выделить решение, затухающее на бесконечности, а вот когда C стало действительным положительным – нет. А что, если нам сделать C чуть-чуть комплексным: с маленькой правой частью?

В этом и состоит идея метода предельного поглощения: в k-уравнении $\Delta u+k^2u=0$
Делаем k чуть-чуть комплексным:
$k = \overline{k} + i\overline{\overline{k}}$, (шаг 1)

В этом случае мы можем однозначно выделить одну ветвь, затухающую на бесконечность (шаг 2)
И только после того, как мы её выделили, мы устремляем мнимую часть к нулю (шаг 3).

Типовые ошибки на экзамене от Боголюбова:
1) Студент говорит, что метод предельного поглощения применяется, если C комплексное. Это сразу бан. Если C комплексное, то выделить затухающую на бесконечности ветвь мы можем и без всяких методов. Слово «предельное» в названии метода не просто так: мы искусственно переходим к комплексному случаю, а потом пределом возвращаемся назад.
2) Студент помнит про шаги 1 и 3, но забывает про шаг 2 – шаг, ради которого всё затевалось. Нужно, пока мы ещё в комплексном случае, успеть выбрать нужную ветвь из двух, и лишь потом переходить к пределу!

Это мы ответили на

14. Сформулируйте принцип предельного поглощения.

Метод конечно, карош, кароший метод, но нужно доказывать корректность перехода к пределу. Не всегда это легко.

Альтернативой является метод предельной амплитуды.

15. Сформулируйте принцип предельной амплитуды.

В нём мы вместо Гельмгольца решаем более сложное уравнение колебаний:

Рассмотрим уравнение колебаний с периодической правой частью:

$$u_{tt} = a^2\Delta u + F(M,t), \quad F(M,t) = f(M)\cdot e^{-i\omega t}, \tag{68}$$

$$u(M,0) = 0,\ u_t(M,0) = 0,\ M \in \mathbb{R}^3. \tag{69}$$

Со временем в системе установятся колебания с частотой вынуждающей силы:

$$u(M,t) = V(M)\cdot e^{-i\omega t}, \tag{70}$$

И эта V(M) нас как раз-то интересует – та предельная амплитуда V(M) и будет решением уравнением Гельмгольца:

$$\Delta V + k^2 V = -f(M), \quad k = \frac{\omega}{a}.$$